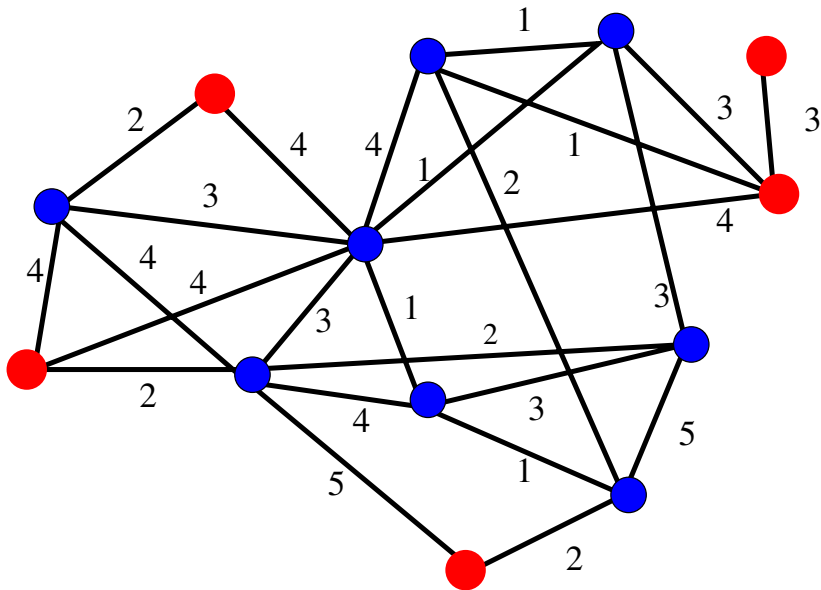


Zur Stärke der Relaxationen für das Steinerproblem

Siavash VAHDATI DANESHMAND

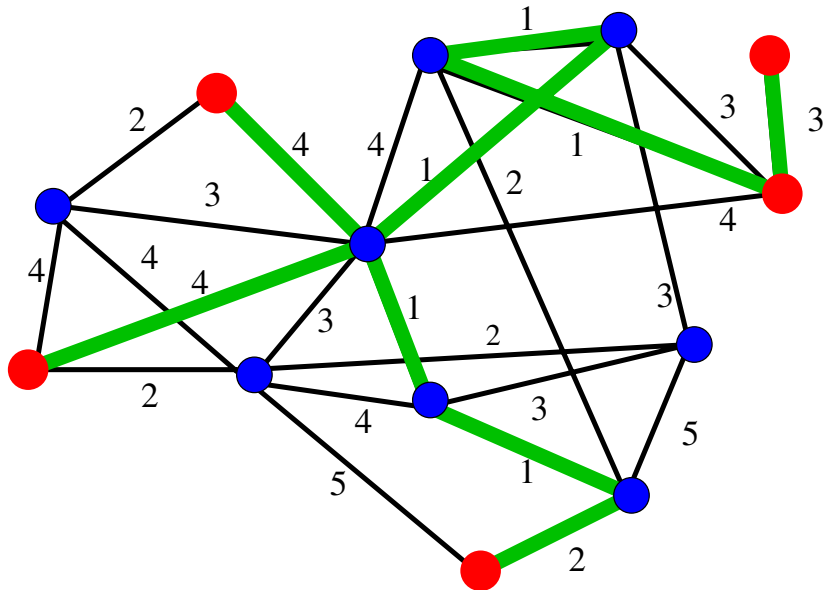
Institut für Informatik
Universität Mannheim

- ▶ Grundlagen
- ▶ Relaxationen
 - Erweiterung und Verstärkung
- ▶ Korrektheit der Ergebnisse
 - Rolle der Reduktionen und Relaxationen
- ▶ Fortführung



Definition

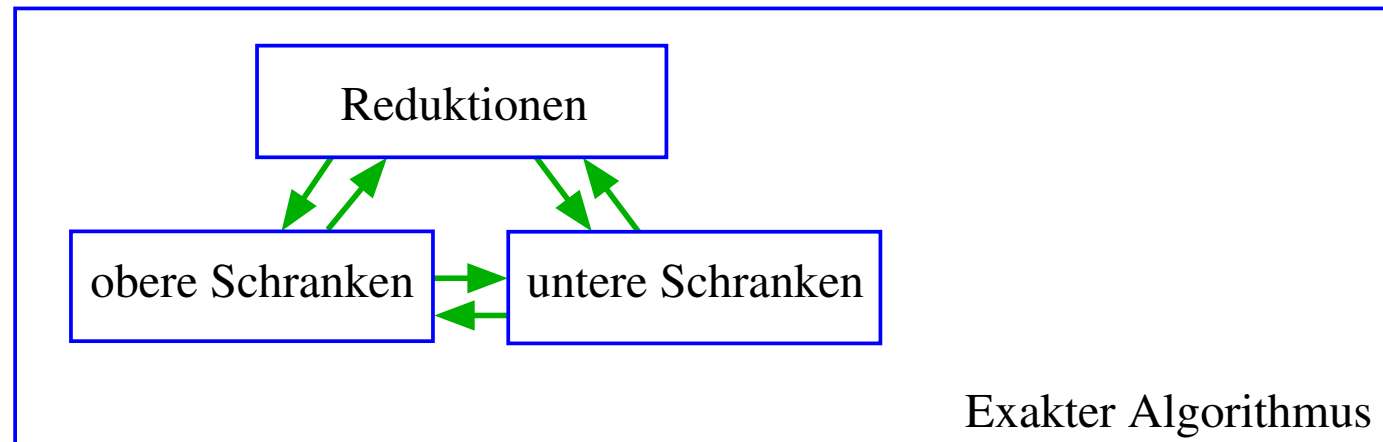
- ▶ Instanz:
 - Netzwerk $G = (V, E, c)$,
 - Basisknoten $R \subseteq V$.
- ▶ Gesucht:
(kostengünstigstes)
Teilnetzwerk in G ,
das R verbindet.



Definition

- ▶ Instanz:
 - Netzwerk $G = (V, E, c)$,
 - Basisknoten $R \subseteq V$.
- ▶ Gesucht:
(kostengünstigstes)
Teilnetzwerk in G ,
das R verbindet.

- ▶ Klassisches NP-schweres Problem
 - Kern vieler Netzwerkprobleme
 - Test- und Entwicklungsfeld für Methoden
- ▶ Anwendungsbeispiele
 - Routing
 - Chip-Entwurf (VLSI)
 - Phylogenetische Bäume
- ▶ Theoretische Ergebnisse
 - NP-schwer, APX-vollständig
 - Polynomialzeit-Approximation mit Güte ≈ 1.55

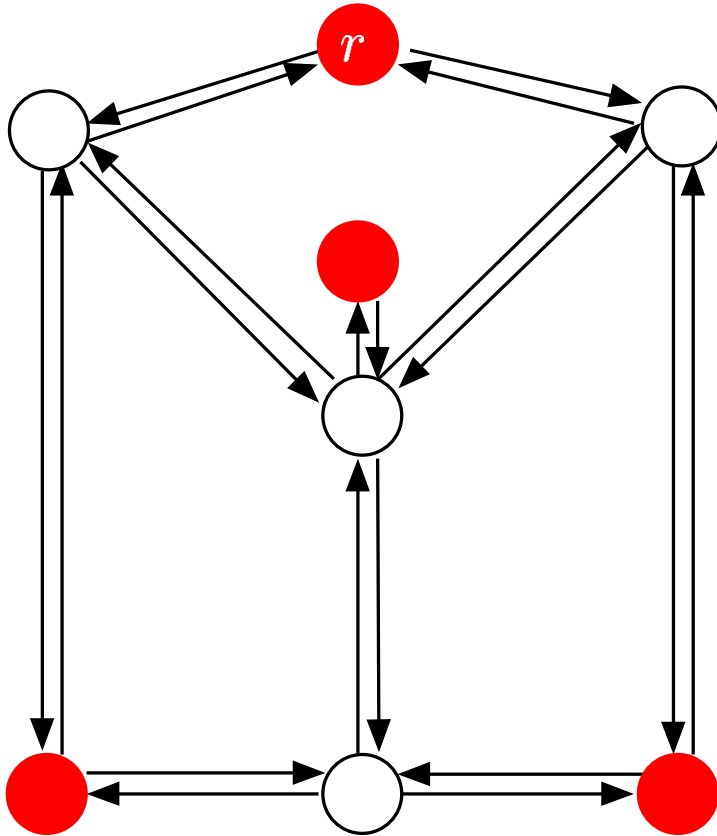


- ▶ Komplexes Programmpaket mit vielen Komponenten (in Zusammenarbeit mit Tobias Polzin)
- ▶ Wechselseitige Abhängigkeit, rekursive Aufrufe
↪ Synergieeffekte
- ▶ Kein simpler Algorithmus mit einigen Zeilen Pseudocode

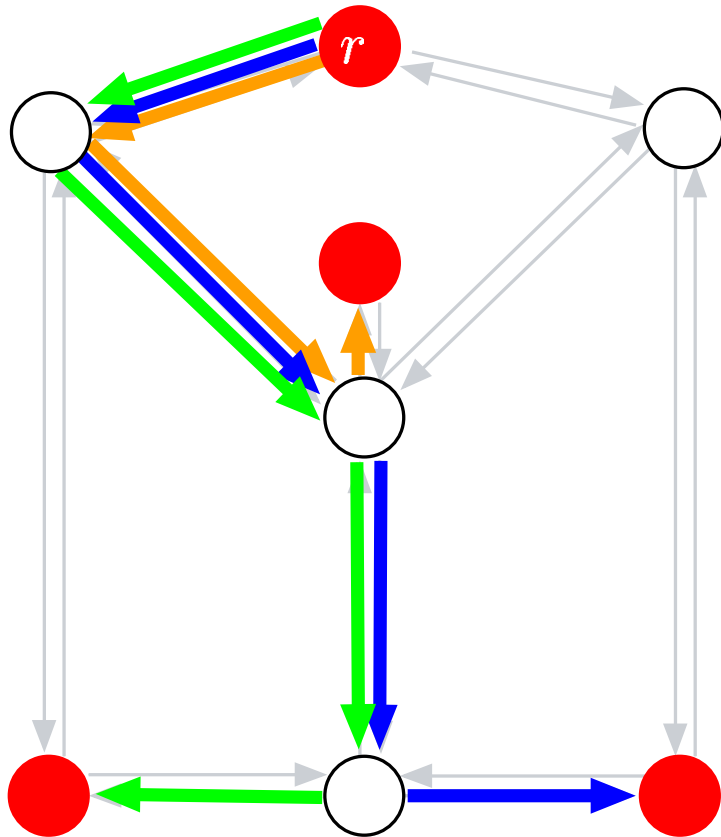
Anwendung Linearer Programmierung:

1. Umformulierung und Relaxation,
2. (Approximative) Lösung der Relaxation,
3. Benutzung der Lösung für
 - ▶ untere Schranken,
 - ▶ obere Schranken,
 - ▶ Reduktionen,
 - ▶ exakte Lösung.

Gerichtete Flussformulierung



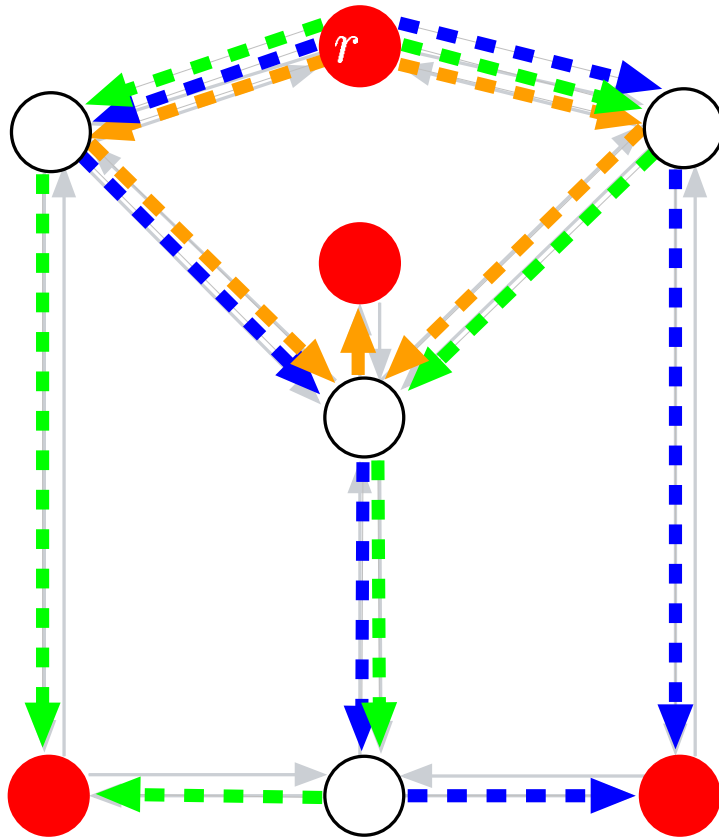
- ▶ Bidirektionale Kanten A
- ▶ Wurzelknoten $r \in R$ (root)
- ▶ Kantenvektor x
- ▶ Für jeden Basisknoten $z \in R^r := R \setminus \{r\}$ wird jeweils eine Einheit von der Wurzel r zu z geschickt (y^z)
- ▶ x : Kantenweises Maximum der y^z Flüsse



Ganzzahlige Lösung mit Wert 6

Gerichtete Flussformulierung

$$\begin{aligned} c \cdot x &\rightarrow \min, \\ y^z(\delta^+(r)) - y^z(\delta^-(r)) &= 1 \quad (z \in R^r), \\ y^z(\delta^+(v)) - y^z(\delta^-(v)) &= 0 \\ &\quad (z \in R^r; v \in V \setminus \{z, r\}), \\ 0 \leq y^z &\leq x \quad (z \in R^r), \\ x &\in \{0, 1\}^{|A|}. \end{aligned}$$



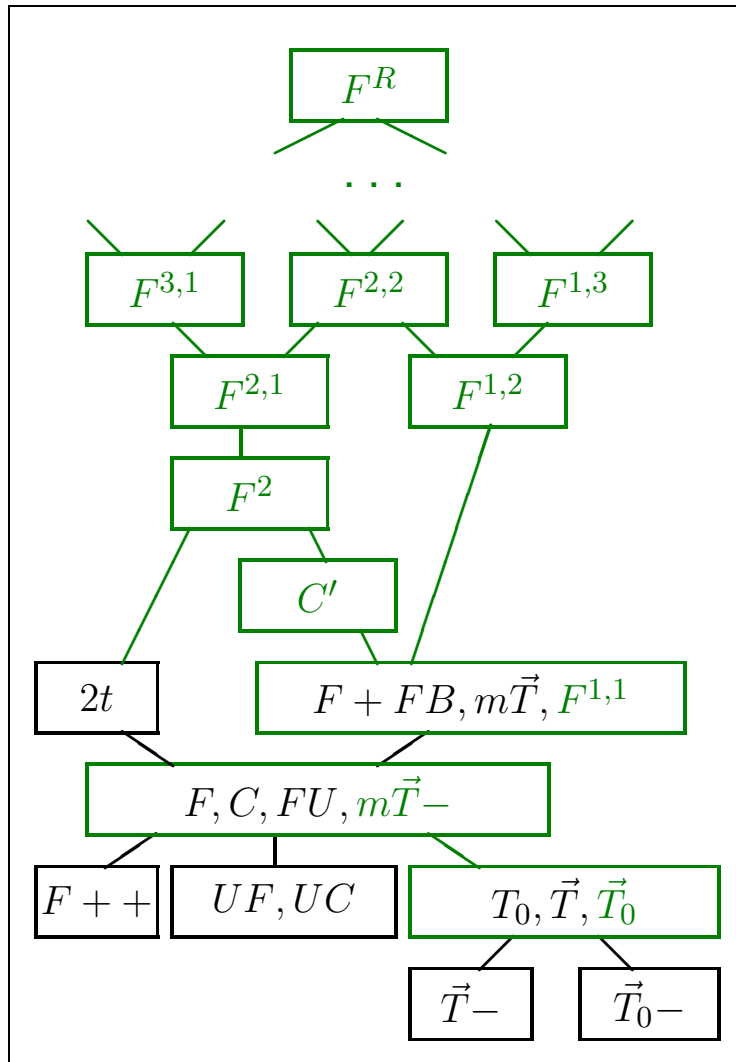
Gebrochen rationale
Lösung mit Wert 5.5

Gerichtete Flussrelaxation

$$\begin{aligned} c \cdot x &\rightarrow \min, \\ y^z(\delta^+(r)) - y^z(\delta^-(r)) &= 1 \quad (z \in R^r), \\ y^z(\delta^+(v)) - y^z(\delta^-(v)) &= 0 \\ &\quad (z \in R^r; v \in V \setminus \{z, r\}), \\ 0 \leq y^z &\leq x \quad (z \in R^r), \\ 0 \leq x &\leq 1. \end{aligned}$$

Ansätze zur Verstärkung von LP Relaxationen:

- ▶ Schnittgenerierung nach bekannten Mustern
 - Facettendefinierende Ungleichungen
 - Branch-and-Cut
- ▶ Benutzung stärkerer Relaxationen
 - Erweiterte Formulierungen
- ▶ Graphentransformation
- ▶ Schnittgenerierung ohne Einschränkung auf Muster
 - Lokale Schnitte



Beziehungen zw. Relaxationen

- ▶ Neue Beweise für Beziehungen zwischen Relaxationen
- ▶ Neue Resultate, welche Nebenbedingungen in welchen Relaxationen helfen können
- ▶ Neue Klasse von polynomiellen Relaxationen, stärker als alle bisherigen poly. Relaxationen

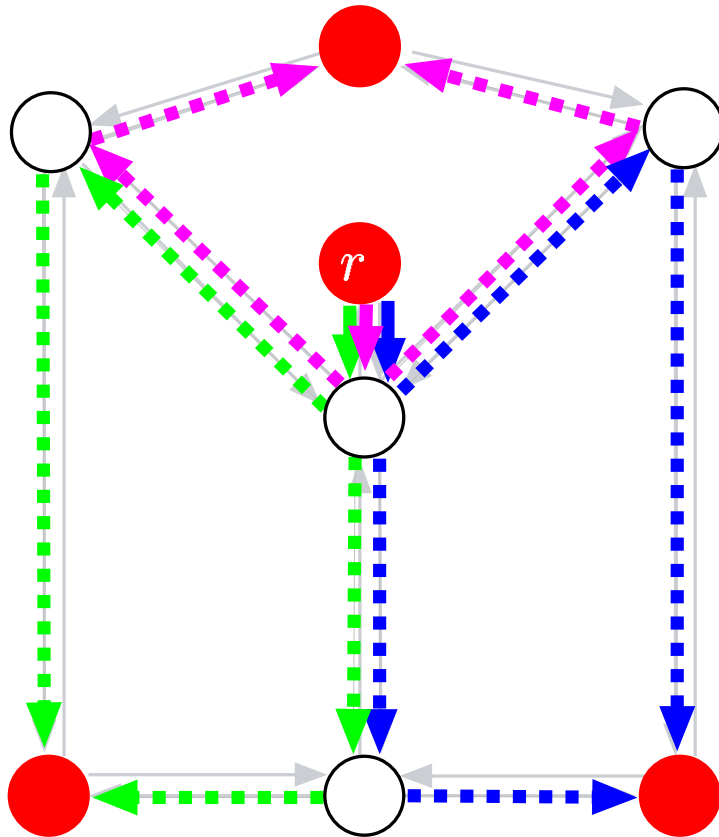
Wiederholung: Gerichtete Flussrelaxation

$$\begin{aligned}c \cdot x &\rightarrow \min, \\y^z(\delta^+(r)) - y^z(\delta^-(r)) &= 1 \quad (z \in R^r), \\y^z(\delta^+(v)) - y^z(\delta^-(v)) &= 0 \quad (z \in R^r; v \in V \setminus \{z, r\}), \\0 \leq y^z &\leq x \quad (z \in R^r), \\0 \leq x &\leq 1.\end{aligned}$$

► $y^z \rightsquigarrow y^B$

Berücksichtigung Gemeinsamer Flüsse

$$\begin{aligned}c \cdot x &\rightarrow \min, \\y^{\{z\}}(\delta^+(r)) - y^{\{z\}}(\delta^-(r)) &= 1 \quad (z \in R^r), \\y^B(\delta^+(v)) - y^B(\delta^-(v)) &\geq 0 \quad (B \subseteq R^r; v \in V \setminus B; v \neq r), \\y^B &\leq y^C \quad (B \subset C \subseteq R^r), \\0 \leq y^B &\leq x \quad (B \subseteq R^r), \\0 \leq x &\leq 1.\end{aligned}$$



Wechsel der Wurzel,
gebrochen rationale
Lösung mit Wert 5.5

Wurzelwechsel

- ▶ Beobachtung: Wahl der Wurzel verändert den Wert
- ▶ Idee: Betrachte alle möglichen Wurzel $r \in R$
- ▶ $y^{r,B}$: Gemeinsamer Fluss von Wurzel r zu allen Basisknoten in B

Wiederholung: Gemeinsame Flüsse

$$\begin{aligned}c \cdot x &\rightarrow \min, \\y^{\{z\}}(\delta^+(r)) - y^{\{z\}}(\delta^-(r)) &= 1 \quad (z \in R^r), \\y^B(\delta^+(v)) - y^B(\delta^-(v)) &\geq 0 \quad (B \subseteq R^r; v \in V \setminus B; v \neq r), \\y^B &\leq y^C \quad (B \subset C \subseteq R^r), \\0 \leq y^B &\leq x \quad (B \subseteq R^r), \\0 \leq x &\leq 1.\end{aligned}$$

► $y^B \rightsquigarrow y^{r,B}$

Gemeinsame Flüsse mit Wurzelwechsel: F^R

$$\begin{aligned}c \cdot X &\rightarrow \min, \\y^{r,\{z\}}(\delta^+(r)) - y^{r,\{z\}}(\delta^-(r)) &= 1 \quad (r \in R; z \in R^r), \\y^{r,B}(\delta^+(v)) - y^{r,B}(\delta^-(v)) &\geq 0 \quad (r \in R; B \subseteq R^r; v \in V \setminus B; v \neq r), \\y^{r,B} &\leq y^{r,C} \quad (r \in R; B \subset C \subseteq R^r), \\y^{r,\{z\}} - y^{r,\{w\}} &\leq y^{w,\{z\}} \quad (\{r, w, z\} \subseteq R), \\y_{ji}^{r,\{w\}} - y_{ji}^{r,\{z\}} &\leq y_{ij}^{w,\{z\}} \quad (\{r, w, z\} \subseteq R; [i, j] \in A), \\y_{ij}^{r,R^r} + y_{ji}^{r,R^r} &\leq X_{ij} \quad (r \in R; (i, j) \in E), \\y &\geq 0, \\0 &\leq X \leq 1.\end{aligned}$$

Eigenschaften von F^R

- ▶ Kein Beispiel bekannt, bei dem diese Relaxation eine Ganzzahligkeitslücke hat.
- ▶ Exponentiell viele Variablen und Nebenbedingungen, daher kein Komplexitätstheoretisches Gegenargument.
- ▶ Schon für kleine Probleminstanzen unbearbeitbar groß.

Eigenschaften von F^R

- ▶ Kein Beispiel bekannt, bei dem diese Relaxation eine Ganzzahligkeitslücke hat.
- ▶ Exponentiell viele Variablen und Nebenbedingungen, daher kein Komplexitätstheoretisches Gegenargument.
- ▶ Schon für kleine Probleminstanzen unbearbeitbar groß.
- ▶ Aber: Eingeschränkte und aggregierte Variante erfolgreich praktisch einsetzbar.

Ergebnisse auf großen Problem instanzen:

d15112	größte jemals gelöste Benchmarkinstanz
es10000	größte SteinLib-Instanz, die von anderen (Warme et al.) gelöst wurde (in Monaten)
fnl4461	größte vorher ungelöste geometrische Instanz in SteinLib
lin37	größte vorher ungelöste VLSI-Instanz in SteinLib

Instanz	Orig. Größe		Red. Zeit	Red. Größe		LP_{C+FB}		+ LP Verstärkung	
	$ V $	$ R $		$ V $	$ R $	Lücke	Zeit	Lücke	Zeit
d15112	51886	15112	5h	22666	7465	0.11 ‰	20.4h	0	+1.5h
es10000	27019	10000	988s	4061	1563	0.04 ‰	251s	0	+33s
fnl4461	17127	4461	995s	8483	2682	0.16 ‰	5299s	0	+1054s
lin37	38418	172	28h	2529	106	0.06 ‰	1810s	0	+50s

Reliable Algorithmic Software

Herausforderung: Entwicklung verlässlicher algorithmischer Software

Ansätze:

- ▶ Code Verifikation
- ▶ Exakte Arithmetik
- ▶ Prüfen und Reparieren
- ▶ Ergebnis Check
- ▶ Zertifizierende Algorithmen
 - Zertifikate (*witnesses*)

Zertifikate

Ansatz: Präsentiere:

- ▶ Obere Schranke (Steinerbaum),
 - ▶ Untere Schranke(n) (LP und (duale) Lösung)
- mit gleichem Wert.

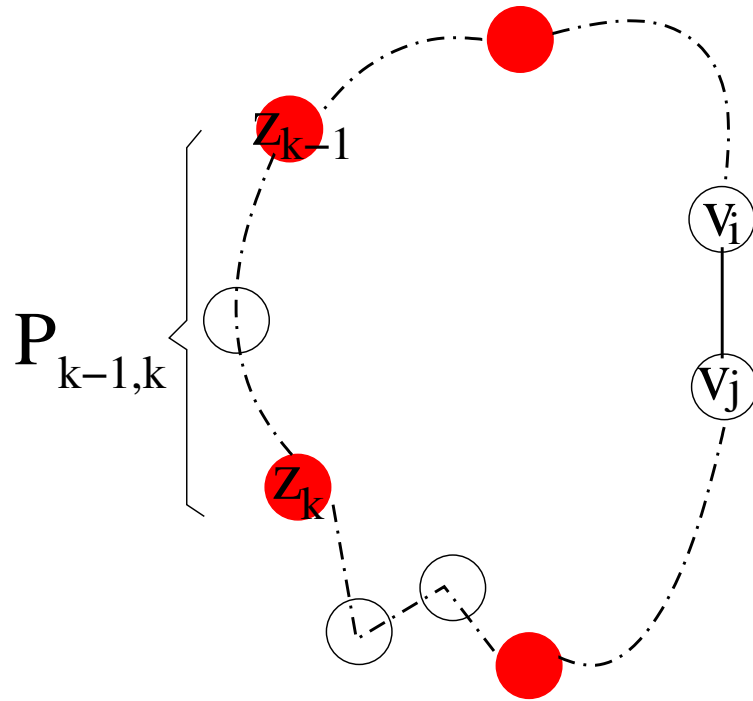
Probleme:

- ▶ Fallunterscheidungen (Branching)
- ▶ Reduktionen

Bereits integriert: Zurücktransformation der Lösung von reduzierter Instanz in Originalinstanz und deren Prüfung

- ▶ Reduktion: Verkleinerung der Probleminstanz, ohne eine optimale Lösung zu zerstören
- ▶ Verschiedene Reduktionstests, sich ergänzende Stärken
- ▶ Aktionen einiger Reduktionstests Wegbereiter für andere \rightsquigarrow Kettenreaktion
- ▶ Zentrale Komponente unseres Programms, nicht nur „Preprocessing“

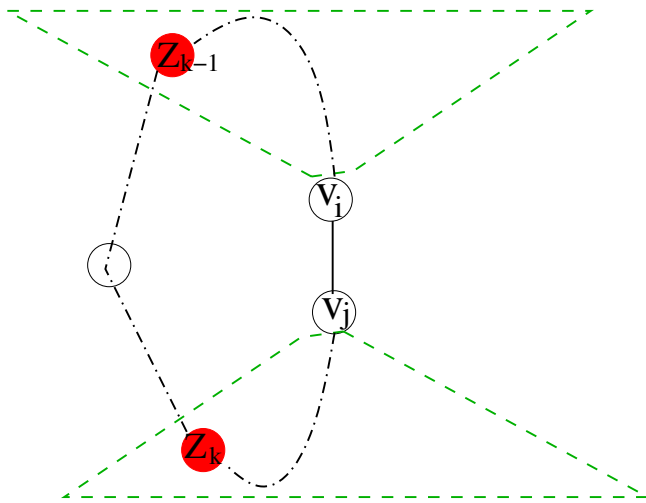
Steiner-Distanzen



Aufteilung in
Elementarpfade

- ▶ Jeder Pfad P_{ij} zwischen v_i und v_j kann in Elementarpfade zwischen v_i , Basisknoten z_k (falls vorhanden) und v_j aufgebrochen werden
- ▶ Steiner-Distanz entlang P_{ij} : Länge eines längsten Elementarpfades auf P_{ij}
- ▶ s_{ij} : kleinste Steiner-Distanz bei Betrachtung aller Pfade P_{ij}

Reduktion mit Steiner-Distanzen



Konstruktion einer Alternativlösung

Jede Kante (v_i, v_j) mit $s_{ij} < c_{ij}$ kann gelöscht werden:

- ▶ Entferne (v_i, v_j) aus dem Baum,
- ▶ Betrachte einen Pfad P_{ij} mit Steiner-Distanz s_{ij} . Auf P_{ij} existiert ein Elementarpfad $P_{k-1,k}$, der die beiden entstehende Teilbäume verbindet,
- ▶ Füge $P_{k-1,k}$ hinzu. Die entstehende Lösung ist zulässig und hat kleinere Kosten.

Ansatz: Zurücktransformation von LP-Relaxationen
Problem: Nicht identische optimale Lösungswerte

Alternative: Checken einzelner Bausteine
Schwierigkeiten bei Reduktionen:

- ▶ Wegen dynamischer Veränderungen schwierig festzustellen, ob Datenstrukturen korrekt gebraucht werden.
- ▶ Viele Reduktionstests sind nur bei sehr effizienter Implementierung profitabel, Prüfung wäre zu aufwändig.

Ansatz: Zurücktransformation von LP-Relaxationen

Problem: Nicht identische optimale Lösungswerte

Alternative: Checken einzelner Bausteine

Schwierigkeiten bei Reduktionen:

- ▶ Wegen dynamischer Veränderungen schwierig festzustellen, ob Datenstrukturen korrekt gebraucht werden.
- ▶ Viele Reduktionstests sind nur bei sehr effizienter Implementierung profitabel, Prüfung wäre zu aufwändig.

Beobachtung: Für viele (klassische) Reduktionen und Relaxationen kann man zeigen: Reduktionen ändern den optimalen Wert der Relaxation nicht.

- ▶ Weitere Beweise
 - Eigenschaften der Relaxationen
- ▶ Behandlung der restlichen Fälle
 - Verstärkte Relaxationen
- ▶ Vollständige Umsetzung ins Programm
 - Zurücktransformation von LP Informationen